

**UNIVERSIDAD EAFIT  
ESCUELA DE INGENIERÍA**

**TRABAJO DE GRADO**

**FENÓMENOS HIDRODINÁMICOS PERIÓDICOS EN UNA  
BOMBA CENTRÍFUGA DE BAJA VELOCIDAD ESPECÍFICA**

**Para la obtención del grado de Máster en Ingeniería**

**Por:  
Hernán Darío Bolaños Arias**

**Asesor:  
Francisco Javier Botero Herrera**

**Medellín, 12 de junio de 2018**

## PRÓLOGO

De los múltiples fenómenos subsíncronicos que se pueden manifestar en una turbomáquina, el Rotating Stall (RS) resulta de especial interés porque la predicción completa del fenómeno aún no es posible, a pesar de que el fenómeno se está estudiando desde hace más de 75 años a nivel mundial [2]. Se tienen identificadas ciertas condiciones de operación en las turbomáquinas para su aparición, pero, aun así, no se tiene certeza de su ocurrencia. En parte porque se puede confundir con otros fenómenos como el surge o fenómenos auto-oscilatorios, o inclusive, con recirculaciones de flujo a la entrada o salida de la turbomáquina.

Una de las primeras referencias al fenómeno la hace Prandtl en 1926 como perturbaciones de recirculación en bombas de agua [2]. No obstante, una gran parte de la investigación y producción de literatura científica sobre el fenómeno se ha llevado a cabo en el campo de los compresores y una pequeña en el campo de las bombas hidráulicas.

De una manera sencilla, el RS se puede definir como una perturbación del flujo en una turbomáquina debida a recirculaciones que bloquean parcial o totalmente los canales entre álabes de los rotores o impulsores. Estas recirculaciones están asociadas a desprendimientos de flujo en la zona fluido-superficie sólida por alteraciones en el ángulo de ataque del flujo cuando entra a los canales entre álabes.

El presente trabajo está enfocado a la identificación del RS en una bomba centrífuga de baja velocidad específica, tomando como base la curva característica de cuatro cuadrantes. Este trabajo es el resultado de dos años de investigación y se presenta en formato de artículo científico porque se tiene la intención de ponerlo en consideración para publicación en una revista especializada.

A raíz de las evidencias recogidas en el desarrollo de la investigación se realizaron dos artículos que fueron aceptados para ponencia en eventos internacionales y escogidos para publicación. El primero, titulado *“Caracterización de la histéresis en una bomba centrífuga en relación con su curva característica”*, fue presentado en el VIII Congreso Internacional de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica y VI de Materiales, Energía y Medio Ambiente, que se llevó a cabo en el mes de abril de 2017 en Medellín. Este artículo fue uno de los escogidos para publicación en el Libro *“Ingeniería Mecánica y Mecatrónica: Innovación para un nuevo país”*, publicado por la Universidad de Antioquia en mayo de 2018 (ISBN: 978-9585413-78-8). El segundo artículo fue titulado *“Subsynchronous Phenomena in a Low Specific Speed Centrifugal Pump”* y fue presentado en el III Latinamerican Hydro Power and Systems Meeting, que tuvo lugar en Quito en septiembre de 2017. Este artículo fue publicado en las memorias del evento (ISBN: 978 9942 8674-0-7) y fue aceptado para publicación en la revista American Journal of Hydropower, Water and Environment Systems (en proceso).

Por último, el autor quiere agradecer a la universidad Eafit y a todas las personas que directa o indirectamente colaboraron con la realización de este trabajo, en especial al profesor Francisco Javier Botero Herrera por su respaldo total, generosidad y sabiduría; a los profesores Jesús Alberto Pérez y Daniel Tobón; a Milton Marín y Carlos Ramírez en el laboratorio de hidráulica; a Julián Duque y Mónica en metrología; y por supuesto, a su familia por el apoyo incondicional.

# Contenido

RESUMEN .....	1
1. INTRODUCCIÓN .....	1
2. MÉTODOS .....	3
2.1 Banco de pruebas .....	3
2.2 Instrumentación .....	4
2.3 Equipo de Adquisición de Datos con filtros anti-alias en dos de sus módulos .....	4
2.4 Curvas características .....	6
2.5 Análisis espectral .....	6
2.6 Análisis de fase .....	7
3. RESULTADOS.....	9
3.1 Curvas características .....	9
3.2 Análisis espectral .....	9
3.3 Análisis de Fase.....	13
4. ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES.....	15
4.1 Cuadrante 1 .....	15
4.2 Cuadrante 2 .....	18
4.3 Cuadrante 3 .....	19
4.4 Cuadrante 4 .....	20
4.5 Conclusiones.....	20
Referencias.....	21

# FENÓMENOS HIDRODINÁMICOS PERIÓDICOS EN UNA BOMBA CENTRÍFUGA DE BAJA VELOCIDAD ESPECÍFICA

## RESUMEN

Dada la posibilidad que tienen las turbomáquinas reversibles para trabajar como motoras y generadoras de energía, resulta de importancia conocer fenómenos hidrodinámicos que afectan su desempeño ante diferentes condiciones de operación. Se entiende el desempeño de la turbomáquina como todo aquello que puede afectar la transformación de energía, y la condición de operación como el caudal y la velocidad de rotación asociados a esa transformación de energía.

Los fenómenos hidráulicos que afectan el desempeño de una turbomáquina son numerosos y muy complejos. Uno de ellos es el Rotating Stall, que ha sido ampliamente estudiando en compresores y relativamente poco en turbomáquinas hidráulicas. La presencia de este fenómeno en determinadas condiciones de operación disminuye el desempeño y genera ruidos y vibraciones que pueden afectar la integridad de las turbomáquinas. Por lo anterior, se definió como objetivo principal de la investigación la identificación y caracterización del RS en una bomba centrífuga de baja velocidad específica ( $N_s=35.7$  o  $n_{QE}=0.11$ ), tomando como referencia su curva característica de cuatro cuadrantes.

Este trabajo se inscribe dentro de la investigación experimental y su alcance está delimitado por la recolección de evidencias que permitan sugerir la existencia del RS, su localización y desplazamiento en la turbomáquina objeto de estudio. El diseño experimental consistió en controlar las variables caudal y velocidad de rotación y observar la respuesta de la turbomáquina a través de las variables presión, aceleración y energía específica. La presión y aceleración fueron medidas en la voluta y la energía específica fue estimada tomando como base la ecuación de Bernoulli. Para el cálculo de esta ecuación se hicieron mediciones de presión y altura en las zonas de alta y baja presión de la turbomáquina. El componente de velocidad promedio fue estimado a partir del caudal en el sistema hidráulico. Todas las variables consideradas en el experimento, excepto la aceleración, se representaron adimensionalmente por medio de los factores de velocidad y caudal y por medio de los coeficientes de fluctuación de presión, energía y caudal, de acuerdo con las definiciones de la norma IEC 60193 [8]. La respuesta de la turbomáquina en la voluta fue analizada en el dominio del tiempo y de la frecuencia, a través de componentes espectrales que fueron, posteriormente, objeto de un análisis de fase utilizando dos métodos diferentes, el de la correlación cruzada y el de las fases de Fourier. Este último método fue desarrollado y propuesto en este estudio como alternativa al método de la correlación cruzada.

En esta investigación se encontraron tres zonas de la curva característica donde se sugiere la existencia de RS. La primera se localiza entre los modos de operación bomba y bomba-freno, la segunda entre los modos de operación turbina y turbina-freno, y la tercera dentro del modo de operación turbina-freno. En esta última zona la evidencia sugiere la coexistencia en algunos puntos de operación de Rotating Stall y surge.

El valor de la investigación radica en el análisis de todos los posibles modos de operación de una turbomáquina reversible y la identificación de las zonas donde se puede presentar el fenómeno hidrodinámico de interés, lo cual puede ser de utilidad en el estudio de las bombas como turbinas (PAT, por su denominación en inglés). Lo anterior haciendo uso de una instrumentación relativamente sencilla y un equipo de adquisición de datos. Implicaciones prácticas de la investigación están relacionadas con el ahorro de tiempo y recursos computacionales al usar un método para el cálculo del número de onda que no necesita del filtrado de señales de presión.

**Palabras claves:** fenómenos subsincrónicos, rotating stall, surge, curva de cuatro cuadrantes, análisis espectral, análisis de fase, número de onda

## 1. INTRODUCCIÓN

Fenómenos hidrodinámicos como el Rotating Stall pueden afectar el desempeño de una bomba en términos de eficiencia, presencia de altos pulsos de presión y elevados niveles de vibración [1]. Si bien el mecanismo de aparición

del RS no ha sido bien comprendido aún [2,3], el fenómeno presenta dos características ampliamente señaladas en la literatura. La primera, que se dan en condiciones fuera de diseño, y la segunda, que se manifiestan a nivel subsincrónico [1,3-6].

La identificación del RS se ha asociado con discontinuidades o cambios de pendiente en las curvas características de las turbomáquinas [1,3-8] y con histéresis en las mismas. En el estudio de Kauper y Staubli [9], recirculaciones de flujo en el impulsor de una bomba centrífuga se relacionó con histéresis en sus curvas características, en la zona de operación de bajos caudales. En este caso, la cuantificación de la histéresis se usó para estimar pérdidas de eficiencia en la bomba objeto de estudio.

De otro lado, la caracterización del RS, entendida como su localización dentro de la turbomáquina, su desplazamiento dentro de la misma y la determinación del número de células de rotación, se ha realizado con análisis espectral y/o análisis de fase de señales obtenidas de sensores de presión [1, 4,5], principalmente, y colocados convenientemente en el impeler y/o en la voluta. Métodos alternativos para la adquisición de señales de velocidad como el LDV [3, 7], o métodos no intrusivos con acelerómetros [6], también se han usado para la identificación del fenómeno. Técnicas computacionales como el CFD están siendo usadas ampliamente en la caracterización de este tipo de fenómenos en turbomáquinas [5,10,11,17].

En condiciones de laboratorio ha sido posible la caracterización del RS [1,4,5], y en algunas oportunidades, su visualización [4,6]. Sin embargo, en muchos casos, la visualización no es posible y las señales externas de las máquinas hidráulicas, tales como ruidos y vibraciones, no son suficientes para identificar claramente la presencia y los efectos de este fenómeno. De allí que resulte de gran importancia el uso de técnicas o métodos para su identificación y caracterización. Dada esta necesidad, se definió, como objetivo principal de esta investigación, la identificación y caracterización del RS en una bomba centrífuga de baja velocidad específica, tomando como referencia su curva característica de cuatro cuadrantes.

## Nomenclatura

a: aceleración [ $\text{m/s}^2$ ]  
 p: presión [Pa]  
 $\bar{p}$ : presión media [Pa]  
 $\rho$ : densidad [ $\text{kg/m}^3$ ]  
 Q: caudal [ $\text{m}^3/\text{s}$ ]  
 E: energía específica del agua disponible entre las secciones de alta y baja presión de la máquina [ $\text{J/kg}$ ]  
 P: potencia mecánica. Se desprecian las pérdidas de potencia disipada en los cojinetes guía, los cojinetes de empuje y los sellos del eje [W]  
 T: torque [Nm]  
 $\eta$ : eficiencia [%]  
 D: diámetro de referencia [m]  
 n: número de revoluciones por segundo [ $\text{s}^{-1}$ ]  
 rpm: número de revoluciones por minuto [ $\text{min}^{-1}$ ]

t: tiempo [s]  
 f: frecuencia [Hz]  
 $f_n$ : coeficiente de frecuencia [-]  
 $f_{pg}$ : frecuencia de paso [Hz]  
 $f_{n\_pg}$ : coeficiente de frecuencia de paso [-]  
 k: número de onda [-]  
 $k_\theta$ : número de onda por el método de las fases de Fourier [-]  
 $k_{Xcorr}$ : número de onda por el método de la correlación cruzada [-]  
 $\sigma$ : desviación estándar

### Variables adimensionales

$n_{QE}$ : velocidad específica  
 $n_{ED}$ : factor de velocidad  
 $Q_{ED}$ : factor de caudal  
 $T_{ED}$ : factor de torque  
 $P_{ED}$ : factor de potencia  
 $E_{nD}$ : coeficiente de energía

$Q_{nD}$ : coeficiente de caudal  
 $\tilde{P}_E$ : coeficiente de fluctuación de presiones

### Abreviaciones

RS: Rotating Stall  
 PAT: Pump As Turbine  
 LDV: Laser Doppler Velocimetry  
 CFD: Computational Fluids Dynamics  
 IEC: International Electrotechnical Commission  
 NI: National Instruments  
 PES: PiezoElectrical Sensor  
 PRS: PiezoResistive Sensor  
 OP: Operation Point  
 BEP: Best Efficiency Point  
 PCSS: Point of Change of Slope Sign  
 RMS: Root Mean Square  
 TSA: Time Synchronous Average  
 RSI: Rotor Stator Interaction

Dentro de las técnicas usadas para caracterizar el RS se pueden mencionar los siguientes: curvas características adimensionales, análisis espectral [1,4-6] y análisis de fase [1,5]. En esta investigación se hizo la aplicación de estos métodos en conjunto para lograr una aproximación a la caracterización del fenómeno.

Las contribuciones de este trabajo son las siguientes: (1) un método alternativo para estimar el número de onda que no necesita de señales filtradas, denominado método de las fases de Fourier; (2) un procedimiento para la identificación de señales de presión estables a partir de espectrogramas y espectros de presión de señales segmentadas; (3) un método gráfico complementario al propuesto por Best [14] y Fortin [15] para la diferenciación de la frecuencia de paso y la frecuencia del RS; (4) una representación gráfica alternativa al diagrama en cascada para identificar patrones espectrales.

El documento está organizado de la siguiente manera: la sección 2, denominada Métodos, exhibe las características generales del banco de pruebas, la instrumentación y el equipo de adquisición de datos utilizados. Presenta, además, la descripción de la forma como se construyeron las curvas características y cómo se realizó el análisis espectral y el análisis de fase. En esta sección se incluye la propuesta del método alternativo para calcular el número de onda (método de las fases de Fourier). En la sección 3 se presentan los resultados, que consisten en las curvas características, los patrones espectrales y el cálculo del número de onda. En esta sección se comparan los resultados del método de las fases de Fourier con el método de la correlación cruzada. En la sección 4 se analizan los resultados y se presentan las principales conclusiones del estudio.

## 2. MÉTODOS

### 2.1 Banco de pruebas

El banco de pruebas hace parte del laboratorio de hidráulica de la Universidad Eafit, y consiste en un circuito cerrado de tuberías conectado a un tanque de carga y a un canal. La energía para mover el agua en el circuito es suministrada por un banco de bombas. La forma como se direcciona el flujo dentro del circuito permite simular las condiciones de cabeza hidráulica, ya sea para operar una turbomáquina como bomba o como turbina. En la figura 1 se presenta el banco de pruebas simplificado, donde se muestra solo la válvula de control de caudal y los elementos relevantes del sistema.

La bomba objeto de estudio está integrada al banco de pruebas y corresponde a una ITT-Goulds de 1.5 HP, fabricada en acero inoxidable 316. Sus principales características técnicas se presentan en la tabla 1.

**Tabla 1.** Especificaciones técnicas de la bomba ITT-Goulds

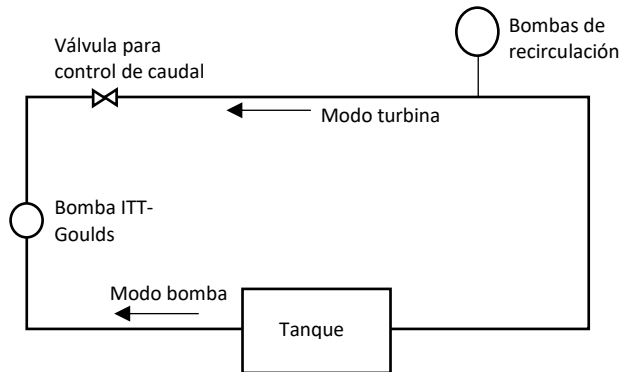
<b>Impulsor</b>	
Diámetro externo	0.14764 m
Diámetro de referencia	0.08104 m
Número de álabes (curvados hacia atrás)	6
<b>Tuberías de entrada y salida</b>	
Diámetro de entrada (orificio de succión)	0.0635 m
Diámetro de salida (orificio de descarga)	0.0508 m
<b>Especificaciones de diseño</b>	
Velocidad específica (Ns)	35.7
Velocidad de rotación	29.167 s <sup>-1</sup>
Caudal	0.009 m <sup>3</sup> /s
Cabeza	7.7 m
Potencia mecánica	1118.5 Watts

La velocidad específica para el punto de operación de diseño también se estimó de acuerdo con la norma IEC 60193 [8]:

$$n_{QE} = \frac{nQ^{0.5}}{E^{0.75}} = 0.11 \quad (1)$$

La bomba cuenta con tramos de las tuberías de succión y descarga transparentes, con el fin de observar el comportamiento del flujo. Así mismo, y con el mismo fin, en la voluta se cuenta con ventanas de visualización.

La bomba objeto de estudio se operó en un rango de velocidades de 380 a 1751 rpm en modo bomba y de 351 a 1902 en modo turbina. Las diferentes velocidades de rotación fueron obtenidas con un variador de velocidad.



**Figura 1.** Esquema simplificado del banco de pruebas

## 2.2 Instrumentación

La instrumentación usada para realizar las pruebas fue la siguiente:

- Transductores de presión piezorresistivos Wika A-10 para medición de presión estática en las zonas de alta y baja presión de la bomba.
- Transductor de presión piezoeléctrico Dytran 2005V para medición de las fluctuaciones de presión en la voluta.
- Transductor de presión piezorresistivo Futek PMP300 para medición las fluctuaciones de presión en la voluta, colocado a 30 grados del transductor de presión piezoeléctrico.
- Acelerómetro Kistler 8704B50M1 instalado en la voluta.
- Sensor de torque Futek TRS600 FSH01998 colocado en el eje de la bomba.
- Medidor de flujo ultrasonido General Electric (GE) TransPort PT878 montado en la tubería de 6" hacia la zona de alta presión.
- Tacómetro digital convencional DT2234C+ para medir la velocidad de la bomba en el eje. Este tacómetro fue modificado para enviar señales en voltaje al equipo de adquisición de datos. La sensibilidad que se presenta en la tabla 2 corresponde a la sensibilidad del equipo sin modificar.

Las principales características técnicas de los instrumentos utilizados se presentan en la tabla 2.

## 2.3 Equipo de Adquisición de Datos con filtros anti-alias en dos de sus módulos

Las señales eléctricas transmitidas por los sensores fueron recibidas y procesadas por medio de un equipo de adquisición de datos CompactRio® 9076 de National Instruments® y un software denominado Turbologger, desarrollado en ambiente LabView® por investigadores de la Universidad Eafit. El equipo de adquisición de datos se conformó con cuatro módulos de adquisición: dos NI-9232, un NI-9215 y un NI-9203. Las especificaciones técnicas generales de los módulos [12], se presentan en la tabla 3.

Los instrumentos Dytran 2005V, Kistler 8704B50M1 y DT2234C+ se conectaron a los módulos NI-9232; los instrumentos Futek PMP300 y Futek TRS600 FSH01998 se conectaron al módulo NI-9215; los instrumentos Wika A-

10 instalados en las zonas de alta y baja presión y el GE TransPort PT878 se conectaron al módulo NI-9203. De aquí en adelante, los sensores montados en la voluta serán llamados de la siguiente manera: el Dytran 2005V como PES, el Futek PMP300 como PRS y el Kistler 8704B50M1 como el acelerómetro. En la figura 2 se muestra la localización de los instrumentos de medición y su conexión al equipo de adquisición de datos.

**Tabla 2.** Especificaciones técnicas de la instrumentación utilizada

Instrumento	RO (Rated Output)	Rango	Span	Linealidad	Repetibilidad	Histéresis	Sensibilidad
Wika A-10 en zona de baja presión	4 a 20 mA	-30mmHg a 100 psi	693476 Pa	$\leq \pm 0.5$ % del span	$\leq 0.2$ % del span	$\leq \pm 1.4$ % del span	-
Wika A-10 en zona de alta presión	4 a 20 mA	-30mmHg a 100 psi	693476 Pa	$\leq \pm 0.5$ % del span	$\leq 0.1$ % del span	$\leq \pm 0.3$ % del span	-
Dytran 2005V	0 a 5 VDC	0 a 50 psi	344738 Pa	$\pm 0.1$ % del span	-	-	100 mV/psi
Futek PMP300	0 a 10 VDC	0 a 50 psi	344738 Pa	$\pm 0.5$ % del RO	$\pm 0.1$ % del RO	$\pm 0.16$ % del RO	-
Kistler 8704B50M1	$\pm 5$ V	$\pm 50$ g	100 g	$\pm 1$ % del RO	-	-	100 mV/g
Futek TRS600 FSH01998	$\pm 5$ VDC	-20 a 20 Nm	40 Nm	$\pm 0.2$ % del RO	$\pm 0.2$ % del RO	$\pm 0.1$ % del RO	-
GE TransPort PT878	4 a 20 mA	-10 l/s a 20 l/s (para la configuración del instrumento en las mediciones)	30 l/s	-	$\pm 0.1\%$ a $\pm 0.3\%$ de la lectura	-	-
DT2234C+	0 a 5 V	2.5 a 99999 rpm	99996.5 rpm	-	-	-	0.1 rpm (2.5 y 999.9 rpm) 1 rpm (1000 y 99999)

**Tabla 3.** Especificaciones técnicas de los módulos de adquisición

Módulo	Filtro anti alias	Número de canales	Rangos de señal	Máxima velocidad de muestreo	Resolución
NI-9232	Si	3	$\pm 30$ V	102.4 Ks/s/ch	24 bits
NI-9215	No	4	$\pm 10$ V	100 Ks/s/ch	16 bits
NI-9203	No	8	$\pm 20$ mA	200 Ks/s/ch	16 bits



**Figura 2.** Localización de los instrumentos usados en las mediciones

Todas las señales fueron registradas simultáneamente y compuestas por 655360 datos por cada una de las variables en cada punto de operación. Los puntos de operación fueron obtenidos variando la velocidad de rotación del rotor y el caudal. Entre puntos de operación consecutivos la velocidad varió entre 1 y 20 rpm y el caudal entre 0.1 y 2 l/s.



La velocidad de muestreo fue de 20480 Hz. Con estos parámetros se adquirieron señales que permitieron observar fenómenos armónicos con frecuencias entre 0.03 Hz (frecuencia fundamental de Fourier) y 10240 Hz (Frecuencia de Nyquist).

Las señales en corriente y voltaje obtenidas por el equipo de adquisición de datos se convirtieron a unidades ingenieriles del Sistema Internacional de medidas.

## 2.4 Curvas características

Las curvas características son representaciones gráficas del comportamiento de las turbomáquinas con respecto a variables de interés como velocidad angular, caudal, torque, potencia, etc. Una de las bondades de las curvas características es la presentación en un solo gráfico del comportamiento de todos los posibles puntos de operación de una turbomáquina. Con base en esto, se pueden identificar zonas problemáticas que pueden estar asociadas a la presencia de fenómenos hidrodinámicos como el RS o el surge. Estas zonas se encuentran normalmente donde se dan cambios de signo de pendiente en las curvas características [8].

Las bombas centrífugas tienen la posibilidad de invertir su dirección de rotación, lo que les permite cambiar la dirección de flujo y operar, en condiciones para las que no fueron diseñadas, como turbinas. Esta particularidad posibilita la caracterización de una bomba centrífuga por medio de la curva de cuatro cuadrantes, tal como fue propuesta por Knapp en 1937, que relaciona velocidad de rotación con caudal [13]. La curva de cuatro cuadrantes usada en esta investigación difiere de la de Knapp por el uso de números adimensionales, los factores de velocidad y de caudal, definidos como lo establece la norma IEC-60193 [8]. Adicional a esta, se construyeron las curvas características de factor de velocidad vs factor de torque y de factor de velocidad vs factor de potencia. Los factores adimensionales de torque y de potencia también fueron estimados de acuerdo con la norma IEC-60193 [8]. Las definiciones de los factores que intervienen en la construcción de estos tipos de curvas se presentan a continuación:

$$n_{ED} = \frac{nD}{E^{0.5}} \quad (2)$$

$$Q_{ED} = \frac{Q}{D^2 E^{0.5}} \quad (3)$$

$$T_{ED} = \frac{T}{\rho D^3 E} \quad (4)$$

$$P_{ED} = \frac{P}{\rho D^2 E^{1.5}} \quad (5)$$

$$E_{nD} = \frac{E}{n^2 D^2} \quad (6)$$

$$Q_{nD} = \frac{Q}{n D^3} \quad (7)$$

Las curvas características fueron construidas con 335 puntos localizados en todos los posibles modos de operación de la turbomáquina objeto de estudio.

## 2.5 Análisis espectral

El análisis espectral se hizo sobre las señales registradas por los sensores de presión instalados en la voluta (PES y PRS) y para todos los puntos de operación considerados en las curvas características. Las señales de presión se convirtieron a sus correspondientes coeficientes de fluctuaciones de presión,  $\tilde{P}_E$ , definidos de acuerdo con la norma IEC-60193 [8]:

$$\tilde{P}_E = \frac{p - \bar{p}}{\rho E} \quad (8)$$

Las frecuencias se representaron adimensionalmente como coeficientes de frecuencia,  $f_n$ , definidos según la norma IEC-60193 [8], como:

$$f_n = \frac{f}{n} \quad (9)$$

El análisis espectral reunió varias técnicas para el procesamiento de señales, tales como: determinación de espectros de amplitud, comparación entre espectros de densidad de potencia, coherencia de señales, correlación cruzada, autocorrelación, espectrogramas, etc. Todo el procesamiento de datos se hizo por medio de código en Matlab® y se utilizaron funciones predefinidas en este programa, como: *fft*, *pwelch*, *mscohere*, *xcorr*, *spectrogram*, entre otros. Con el análisis espectral se buscó la identificación de aquellos componentes subsíncronos que pudieran estar relacionados con algunos de los fenómenos hidrodinámicos de interés, como el RS.

El análisis espectral partió de la observación de los espectros de cada una de las señales de los sensores para cada uno de los puntos de operación. Se tomó en consideración el rango de frecuencias de 0 a 2.5 veces la velocidad de rotación de la máquina y se identificaron los componentes espectrales claramente diferenciables en amplitud. Con este criterio se pudieron identificar los componentes espectrales presentes en todos los puntos de operación. A partir de esta información se definieron los patrones de comportamiento espectral para cada uno de los cuadrantes de la curva característica  $Q_{ED-NED}$ .

Posteriormente se realizó un análisis de estabilidad de los componentes espectrales identificados. La estabilidad espectral consistió en identificar aquellos componentes que tuvieran un comportamiento regular a lo largo del tiempo y que coincidieran en frecuencia en los espectros de las señales de los dos sensores de presión montados en la voluta. En otras palabras, que  $f_{i\_PES} \approx f_{i\_PRS}$ , donde,  $f_{i\_PES}$  es el  $i$ -ésimo componente espectral identificado en la señal del PES y  $f_{i\_PRS}$  es el  $i$ -ésimo componente espectral identificado en la señal del PRS. Para ello se observaron los espectrogramas de las señales y se identificaron los componentes con estas características. Los espectrogramas fueron construidos con la función *spectrogram* de Matlab® con ventana de Hann, con traslape del 90% y un delta de frecuencia de 0.1 Hz. Cabe señalar que el método de la correlación cruzada y la autocorrelación de señales discretas sirven para determinar aquellos componentes preponderantes en el espectro (véase como ejemplo figura 4(a)), pero no muestran su comportamiento a lo largo del tiempo. De otra parte, las bondades de visualización de los espectrogramas facilitan la identificación de los componentes de interés. La coincidencia de frecuencia para cada componente se estimó de la siguiente manera: se tomó cada una de las señales en el dominio del tiempo y se dividió en 20 partes. Cada uno de estos segmentos se transformó al dominio de la frecuencia y se identificaron los componentes espectrales equivalentes a los componentes espectrales identificados en la señal sin segmentar. Se verificó que las señales segmentadas reprodujeran con un margen de coincidencia igual o superior al 90% el componente espectral de interés que había sido identificado en la señal original. Para estimar este porcentaje se contabilizó el número de veces que el componente de interés tenía amplitud máxima en una banda de frecuencia formada por tres componentes, el componente de interés, el componente anterior al de interés y el componente posterior. Este valor se dividió entre el número de segmentos considerados y de allí se calculó el porcentaje de coincidencia.

## 2.6 Análisis de fase

El análisis de fase se realizó sobre una muestra de 29 componentes espectrales que cumplieron con los criterios de estabilidad del análisis espectral. Esta muestra se obtuvo de los componentes espectrales de 15 puntos de operación representativos de la curva  $Q_{ED-NED}$ .

Del análisis de fase se desprende la estimación del número de onda,  $k$ , que es útil para determinar el número de células de rotación en el caso del Rotating Stall [5] y su velocidad de rotación o frecuencia del fenómeno ( $f$ ). Sin embargo, esta estimación puede resultar ambigua, ya que, en el caso del análisis de Fourier, se tiene la certeza de la frecuencia con la que pasa el fenómeno por un sensor, que de ahora en adelante se denominará frecuencia de paso ( $f_{pg}$ ), pero esa frecuencia puede ser resultado del paso de una célula rotando a alta velocidad o de varias células rotando a bajas velocidades [14]. Esta ambigüedad se puede resolver con la gráfica de la correlación cruzada de las señales recibidas en dos sensores, previamente filtradas, tal como lo proponen Best y Fortin [14,15]. La propuesta de estos autores consiste en identificar los pares de picos con mayores correlaciones, que representarían el periodo del fenómeno, y contar las oscilaciones entre esos picos, las cuales corresponderían al número de onda. Sin embargo, la aplicación del método no es posible en muchos casos porque el resultado de la correlación cruzada de señales filtradas no muestra de manera clara los picos que representan el periodo del fenómeno, y el conteo de ondas entre

ellos se vuelve subjetivo. Para subsanar este inconveniente se propone una relación entre el ángulo de desfase estimado por los coeficientes de Fourier sobre las señales originales, es decir, señales sin filtrar, y el ángulo físico que separan los dos sensores en la voluta. El desarrollo de esta expresión, que de aquí en adelante se denominará el  $k_0$  (número de onda por el método de las fases de Fourier) se presenta a continuación.

La ecuación de una onda que se propaga en el espacio [16] se puede expresar como:

$$f(x, t) = A \sin(\omega t - kx) \quad (10)$$

Donde: A es amplitud,  $\omega$  es velocidad angular, t es tiempo, k es el número de onda y x es desplazamiento.

En un dominio circular, x se puede hacer equivalente a un desplazamiento angular,  $\theta$ , que sería el ángulo de barrido por el frente de onda durante el tiempo t. De allí que, la ecuación anterior, se puede expresar como:

$$f(\theta, t) = A \sin(\omega t - k\theta) \quad (11)$$

A partir de la definición de velocidad de fase [16] se puede obtener lo siguiente:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{dx}{dt} \equiv \frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta_G}{t_x} \quad (12)$$

Donde, para el caso de dos sensores montados alrededor de la interface rotor-estator de una bomba centrífuga,  $d\theta$  correspondería al ángulo geométrico,  $\theta_G$ , que forman los puntos de montaje de los sensores ( $\theta_1$  y  $\theta_2$ ), y  $dt$  es el tiempo que tarda el frente de onda en viajar de punto de montaje 1 hasta el 2, que se puede definir como  $t_x$ . Dicho tiempo se podría obtener usando la función de correlación cruzada entre las señales de ambos sensores para la frecuencia  $\omega$  del fenómeno.

De la expresión anterior, se puede llegar a:

$$k = \frac{\omega t_x}{\theta_G} \quad (13)$$

Y, si el ángulo barrido por una componente armónica durante un tiempo t es:  $\theta = \omega t$ , entonces el tiempo que ha tardado una componente espectral en recorrer un ángulo  $\theta$  está dado por:

$$t = \frac{\Delta\theta}{\omega} \quad (14)$$

Donde  $\Delta\theta$  es la diferencia de fases entre una componente capturada en la posición dos,  $\theta_2$ , y en la posición uno,  $\theta_1$ , y  $\omega$  es la frecuencia angular de dicha componente. Si las frecuencias angulares y las fases de cada señal se obtienen mediante un análisis de *Fourier*, entonces  $\Delta\theta$  se puede obtener restando las fases de ambas señales. Además, si la ecuación (8) se reemplaza en la ecuación (7), el número de onda para cada componente i queda determinado por:

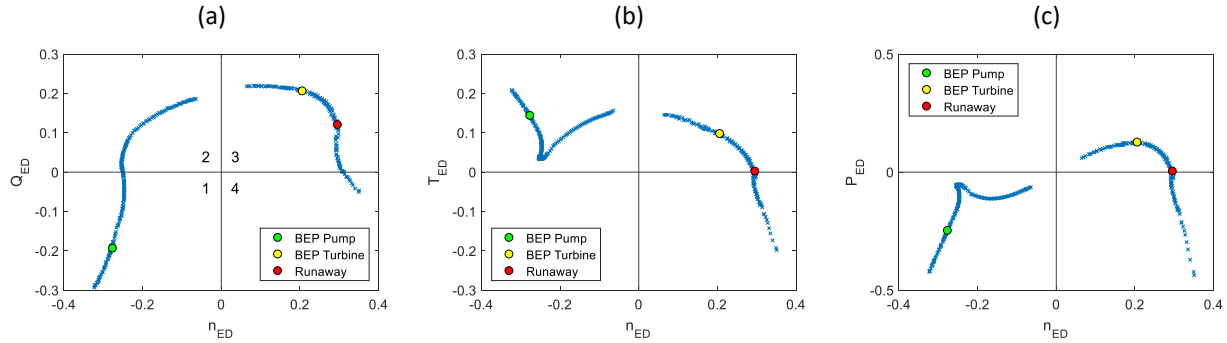
$$k_{\theta i} = \frac{\Delta\theta_i}{\theta_G} \quad (15)$$

Es importante señalar que para el desarrollo de esta expresión se asumió que las celdas rotan a velocidad constante y que en el caso de presentarse varias, estas se encuentran equidistantes. La validación de la expresión (15) se realizó comparando los resultados del método propuesto con los obtenidos por el método de la correlación cruzada definido por la función *xcorr* de Matlab®. Las señales de presión de la voluta fueron filtradas con la función *designfilt* de Matlab®, utilizando varios filtros digitales pasabanda que fueron escogidos de tal manera que no afectaran significativamente la respuesta de las señales en fase ni en amplitud. Los métodos de filtrado usados fueron Elliptic (ellip), Butterworth (butter), Chebyshev tipo 1 (cheby1), Chebyshev tipo 2 (cheby2) y Kaiser (kaiser).

### 3. RESULTADOS

#### 3.1 Curvas características

La figura 3 muestra las curvas características  $Q_{ED}-n_{ED}$  (figura 3a),  $T_{ED}-n_{ED}$  (figura 3b) y  $P_{ED}-n_{ED}$  (figura 3c). En la tabla 4 se presentan los valores de los factores de velocidad, caudal, torque y potencia para los puntos de máxima eficiencia en modo bomba, máxima eficiencia en modo turbina y embalamiento.



**Figura 3.** Curvas características de la bomba objeto de estudio

La curva  $Q_{ED}-n_{ED}$  es propiamente la llamada curva de cuatro cuadrantes (los cuales están señalados en la figura 3(a), donde el primer cuadrante corresponde a bomba, el segundo a bomba freno, el tercero a turbina y turbina freno y el cuarto a bomba inversa [8]. En el caso de las curvas  $T_{ED}-n_{ED}$  y  $P_{ED}-n_{ED}$ , sus cuadrantes no tienen correspondencia directa con los cuadrantes de la curva  $Q_{ED}-n_{ED}$ .

**Tabla 4.** Factores de velocidad, caudal, torque y potencia de los puntos relevantes de las curvas características

Punto	$n_{ED}$	$Q_{ED}$	$T_{ED}$	$P_{ED}$	Observación
BEP Bomba	-0.2759	-0.1939	0.1432	-0.2482	$\eta=78.1\%$
BEP Turbina	0.2063	0.2056	0.0970	0.1258	$\eta=61.2\%$
Embalamiento	0.2959	0.1202	0.0017	0.0031	$T \approx 0$ (0.04 N.m)

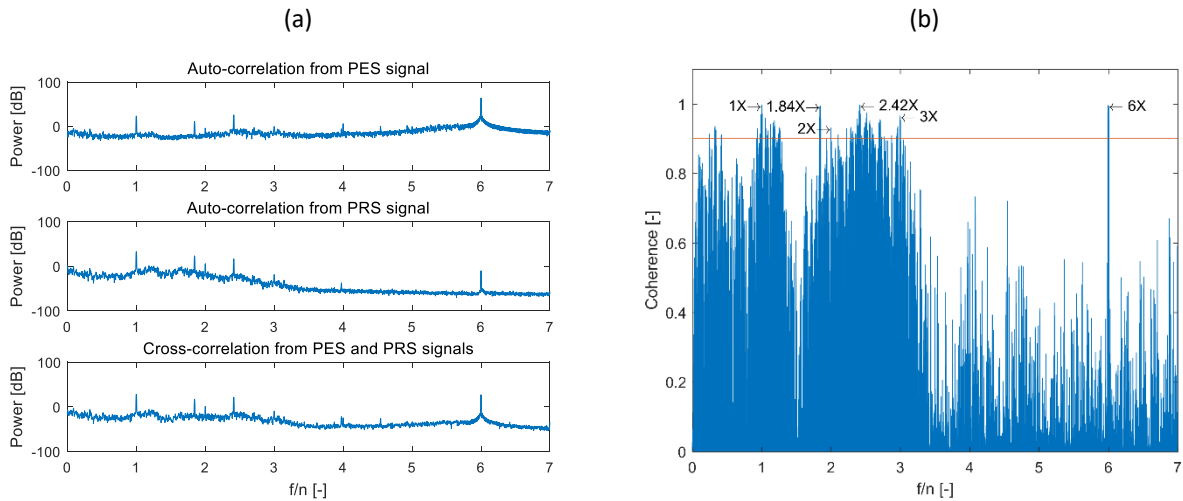
#### 3.2 Análisis espectral

Por medio de los espectros de densidad de potencia de las señales de los sensores de presión instalados en la voluta, y utilizando los métodos de la autocorrelación y la correlación cruzada entre estas señales, se verificó, en primera instancia, que las señales de los dos sensores reprodujeran en términos generales los mismos componentes de interés. La comparación directa entre las diferentes gráficas de autocorrelación y correlación cruzada lo permitió. Se complementó esta comprobación con la estimación de coherencia de señales. Todo esto fue realizado con las funciones *pwelch*, *xcorr* y *mscohere* de Matlab®. Un ejemplo se puede ver en la figura 4 para uno de los puntos de operación de la bomba (OP244). Allí se puede observar los componentes claramente identificados por los dos sensores instalados en la voluta. En la figura 4(a), al comparar directamente las gráficas de autocorrelación de las señales de los sensores de presión y de autocorrelación entre los mismos, se pueden ver claramente los componentes 1X, 1.84X, 2X, 2.42X, 3X y 6X. En la figura 4(b) se observa que la coherencia para estos componentes es superior al 90% (línea roja).

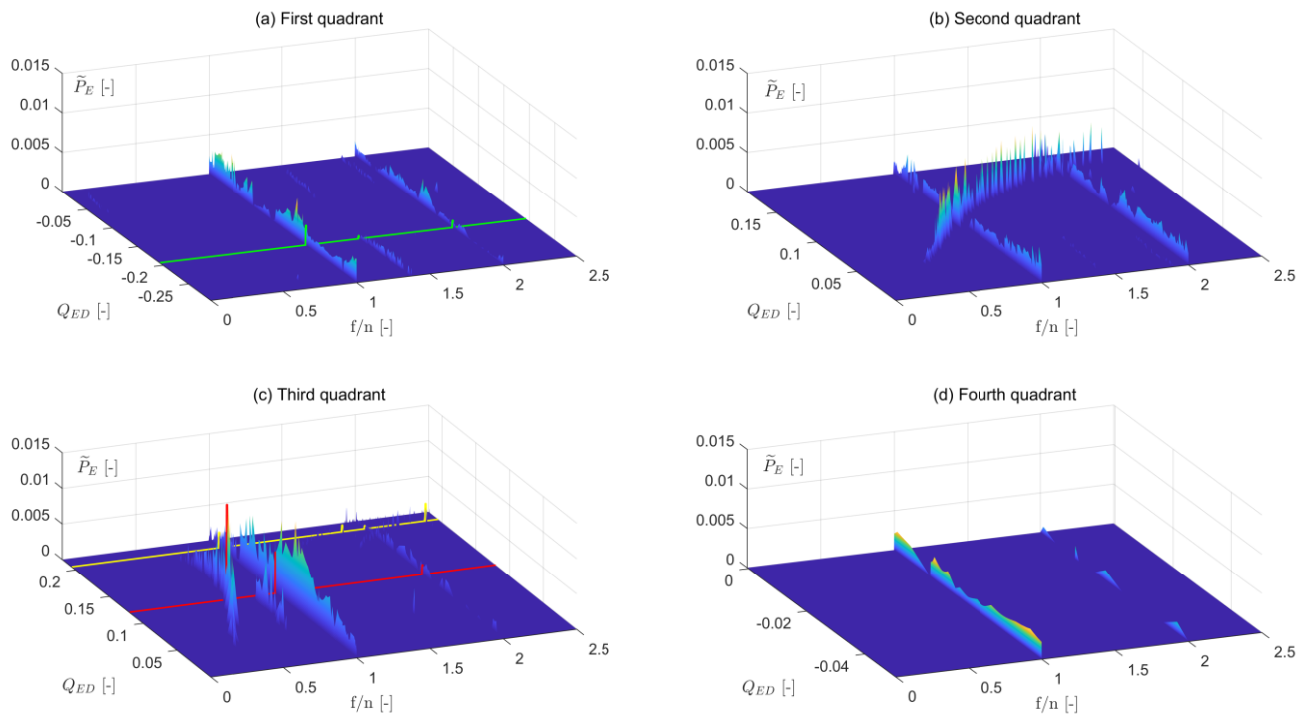
En la primera parte del análisis espectral se observaron patrones espectrales diferentes al 1X y 2X en los primeros 3 cuadrantes de la curva característica  $Q_{ED}-n_{ED}$ . En el cuarto cuadrante no se identificó ningún patrón, excepto los correspondientes al 1X y el 2X. Los patrones obtenidos a partir de las señales de los PES y PRS coincidieron y solo se diferenciaron en la amplitud de los espectros. La amplitud de los componentes espectrales de interés es significativamente mayor en los espectros obtenidos a partir de las señales del PRS.

La figura 5 presenta los patrones encontrados en función del coeficiente de frecuencia,  $f_n$ , y del coeficiente de caudal,  $Q_{ED}$ , para las señales del PES. En esta gráfica se consideraron 901 componentes espectrales claramente definidos en

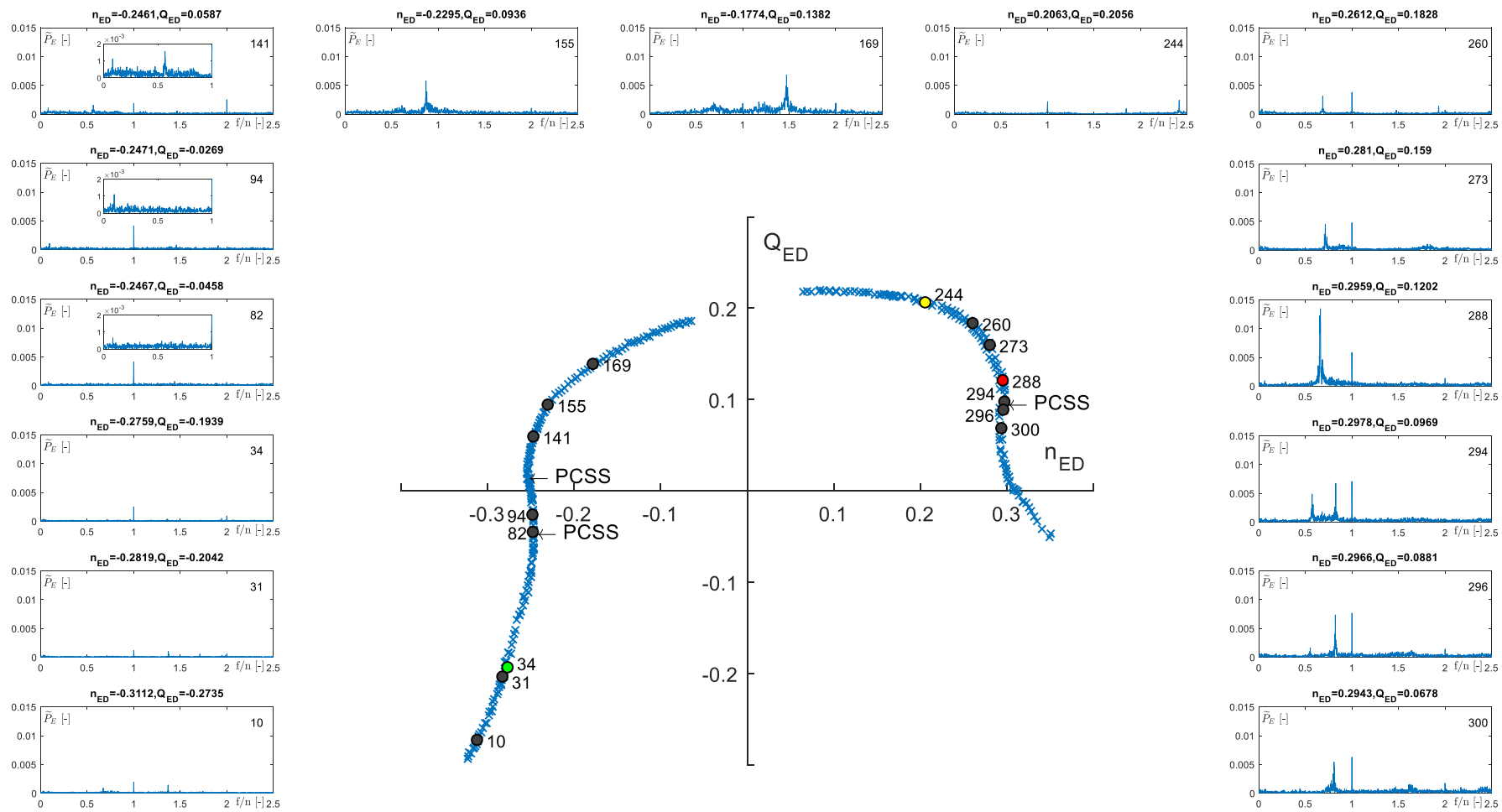
el rango 0X a 2.5X y se resaltaron los espectros de los puntos de máxima eficiencia en modo bomba (color verde), máxima eficiencia en modo turbina (color amarillo) y embalamiento (color rojo).



**Figura 4.** Componentes espectrales significativos en el OP244, identificados por los dos sensores instalados en la voluta



**Figura 5.** Patrones espectrales en cada uno de los cuadrantes de la curva característica  $Q_{ED}$ - $n_{ED}$ , obtenidos a partir de las señales del PES

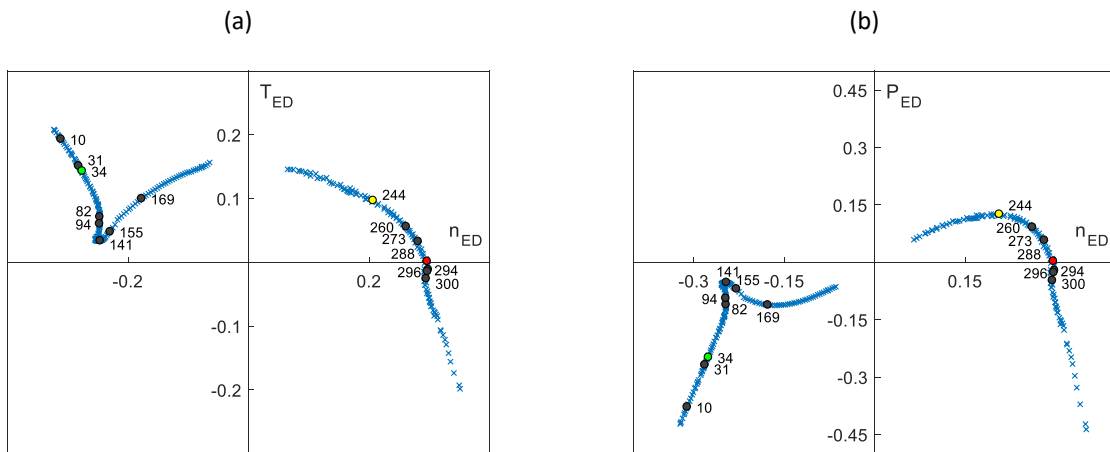


**Figura 6.** Curva característica  $Q_{ED}$ - $n_{ED}$  y algunos puntos de operación representativos con sus correspondientes espectros de amplitud.

Las gráficas de la figura 5 tienen en común la identificación de los componentes 1X y 2X, aunque no están completamente distribuidos en todo el rango de los coeficientes de caudal de cada cuadrante. En la figura 5(a) se da un componente aproximado a 1.37X para valores de  $Q_{ED}$  entre -0.1939 y -0.2934 (patrón 1), que correspondería a coeficientes de caudal mayores al del punto de máxima eficiencia en modo bomba. En la figura 5(c) se observa otro patrón alrededor del componente 0.81X en el intervalo [0.0651, 0.1107] de  $Q_{ED}$  (patrón 2), que corresponde a la parte alta del modo de operación turbina-freno.

Los otros dos patrones generales observados en los cuadrantes 2, figura 5(b), y 3, figura 5(c), no tienen un comportamiento constante alrededor de un valor de  $f_n$ . En el primer caso, los valores de  $f_n$  varían entre 0.47 y 2.23, para intervalos de  $Q_{ED}$  entre 0.0522 y 0.1646 (patrón 3), y en el segundo,  $f_n$  varía entre 0.37 y 0.68, para un rango de  $Q_{ED}$  entre 0.0397 y 0.1891 (patrón 4), el cual cubre parte del modo turbina y gran parte del modo turbina-freno. Existe otro patrón general de baja amplitud que se puede observar en el cuadrante 1, figura 5(a). Allí se puede notar un componente 1.45X que se distribuye entre  $Q_{ED}=-0.0255$  y  $Q_{ED}=-0.0780$  pero que no fue considerado en el estudio.

Una vez identificados los patrones generales se halló la correlación de algunos espectros de amplitud y sus puntos de operación en la curva característica  $Q_{ED}-n_{ED}$ , lo cual se puede notar en la figura 6. Los espectros allí presentados corresponden a las señales del PES. En las figuras 5(a) y 5(b) se pueden observar estos mismos puntos de operación en sus correspondientes curvas características  $T_{ED}-n_{ED}$  y  $P_{ED}-n_{ED}$ , respectivamente.

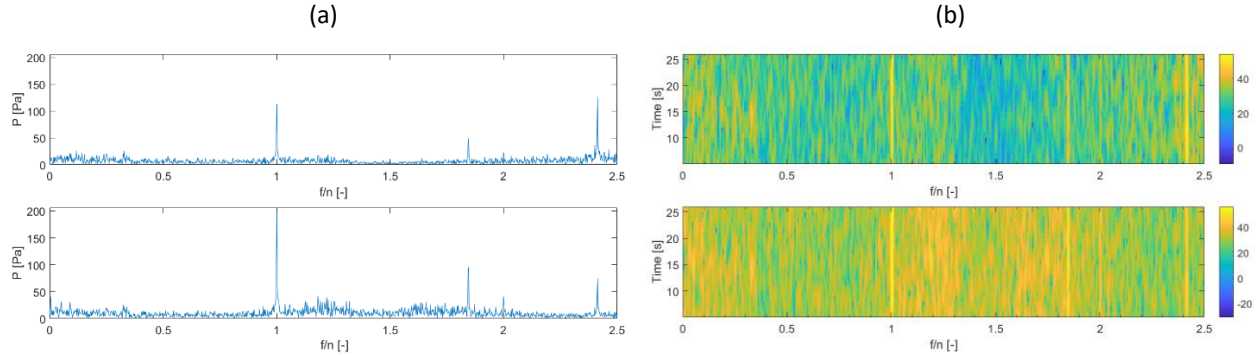


**Figura 7.** (a) Curva característica  $T_{ED}-n_{ED}$  y (b) Curva característica  $P_{ED}-n_{ED}$  con algunos puntos de operación representativos

Sobre una muestra de 51 componentes espectrales de interés identificados en los 15 espectros mostrados en la figura 6, se realizó el análisis de estabilidad propuesto en la sección de métodos. De allí se encontraron 29 señales con una estabilidad igual o superior al 90%. Con la muestra estudiada se pudo observar que la estabilidad está relacionada en la mayoría de los casos con los patrones espectrales (24 de los 29 componentes estables se ajustan a un patrón espectral). Por ejemplo, el componente 1X se presenta en 12 de los 15 puntos de operación cumpliendo el criterio de estabilidad y los puntos de operación 10 y 31 muestran el componente 1.37X como estable. Los componentes estables que no están dentro de los patrones mostrados en la figura 5 son los siguientes: 1.85X y 2.42X en el punto 244; 1.48X y 1.93X en el punto 260. En esta misma figura se señalan los puntos de cambio de signo de pendiente (PCSS). Estos puntos corresponden a los puntos de operación 82, en modo bomba, 122, en modo bomba freno, y 294, en modo turbina freno.

En la figura 8 se puede observar un ejemplo de los espectros y espectrogramas considerados en el análisis de estabilidad para el OP244. Las gráficas superiores hacen referencia al espectro y al espectrograma construidos con la señal del PES y las inferiores, de manera similar, con el PRS. En la figura 8(a) se puede observar que los espectros de las señales presentan por lo menos tres componentes claramente diferenciables en frecuencia y amplitud, en  $f_n=1$ ,  $f_n=1.85$  y  $f_n=2.42$ . En la figura 8(b) se puede observar que estos componentes son estables a lo largo del tiempo.

Para este punto de operación, se alcanzó una coincidencia del 97.5% para el componente  $f_n = 1$ , el 100% para  $f_n = 1.85$  y el 100% para  $f_n = 2.42$ .



**Figura 8.** Espectros (a) y espectrogramas (b) para OP244 correspondiente al punto de máxima eficiencia en modo turbina,  $n_{ED}=0.2063$  y  $Q_{ED}=0.2056$ .

### 3.3 Análisis de Fase

El análisis de fase se orientó al cálculo del número de onda por el método de las fases de Fourier que se propone en este artículo ( $k_\theta$ ) y por el método de la correlación cruzada ( $k_{Xcorr}$ ).

En la tabla 5 se presentan los resultados, donde el subíndice  $\theta$  hace referencia a los parámetros estimados por los coeficientes de Fourier y  $Xcorr$  a los parámetros calculados por el método de la correlación cruzada. La columna (1) indica el cuadrante donde se encuentra el punto de operación, la (2) el número del punto de operación, la (9) el error relativo en la estimación del número de onda por los dos métodos empleados, y las columnas 10 a 15 presentan los valores corregidos para los números de onda, las frecuencias y los coeficientes de frecuencia por los dos métodos empleados. Esta corrección se hace partiendo de las siguientes hipótesis: primera, los números de ondas son números enteros; segunda, la frecuencia de paso ( $f_{pg}$ ), que es la que miden los sensores, es igual al numero de onda por la frecuencia del fenómeno [14]; tercera, para que se cumpla la hipótesis anterior es necesario corregir el valor de la frecuencia del fenómeno para garantizar que  $f_{pg}=k.f$ .

Tomando los resultados de los números de onda sin corregir (columnas 7 y 8 de la tabla 5) se observa que 26 de 29 tienen errores relativos por debajo del 10% entre los dos métodos considerados, 28 por debajo del 15% y solo un número de onda presenta un error considerable en el estimativo (32%). Ahora, en lo que tiene que ver con los números de onda ajustados (columnas 12 y 13 de la tabla 5), los resultados de los dos métodos coinciden en 28 de los 29 casos. Resulta importante señalar que el  $k$  no coincidente, en  $f_{n\_pg}=2.42$  del OP244, corresponde a un componente espectral que cumple con el criterio de estabilidad, pero no hace parte de ninguno de los patrones espectrales generales identificados en el análisis espectral. No obstante, es necesario resaltar que para este componente la diferencia entre los dos métodos se da por la aproximación al número entero y no por la estimación, ya que, al observar los valores del número de onda sin aproximar, el error relativo entre los dos métodos es muy bajo, apenas del 1.8%.

En lo que tiene que ver con el estimativo de los ángulos de desfase, 7 de los 29 casos presentan valores con diferencias significativas entre los dos métodos empleados. Sin embargo, esta situación no afecta el estimativo del número de onda ya que para  $k$  se obtienen valores similares con bajos errores relativos.

A cuatro de los componentes espectrales que no cumplieron con el criterio de estabilidad ( $f_n=0.096$  del OP944, 0.081 del OP141, 0.826 del OP294 y 0.841 del OP295), se les realizó el análisis de fase por los dos métodos considerados. En la tabla 6 se presentan los resultados obtenidos. A pesar de que los componentes en las señales no presentan estabilidad, el estimativo del número de onda por los dos métodos fue similar. Al respecto cabe señalar que, en el caso del primer componente, el ángulo de desfase entre las dos señales de presión segmentadas varió entre  $0.52^\circ$  (percentil 25) y  $54.4^\circ$  (percentil 75) con los datos bien distribuidos alrededor de la mediana ( $27.6^\circ$ ) utilizando el método de las fases de Fourier. Lo anterior, realizando un análisis de distribución y dispersión por medio de un gráfico de cajas y bigotes (boxplot). En el segundo componente la variación de los ángulos de desfase fue menor que en el



caso anterior y varió entre 23.1° (percentil 25) y 47.8° (percentil 75), con mediana 36.2°. Con respecto a los otros dos componentes, los ángulos de desfase se distribuyeron entre 5.2° y 11.8° con mediana de 9.0°, en el caso del tercero, y entre -6.4° y 4.9° con mediana de 1.4° en el caso del cuarto. El signo negativo en los ángulos de desfase significa que, en algunas de las series segmentadas, el fenómeno lo registró primero el PRS que el PES, al contrario de lo ocurrido en la mayoría de los casos.

**Tabla 5.** Números de onda, frecuencias y coeficientes de frecuencia para una muestra de componentes representativos estables de la curva característica  $Q_{ED-N_{ED}}$

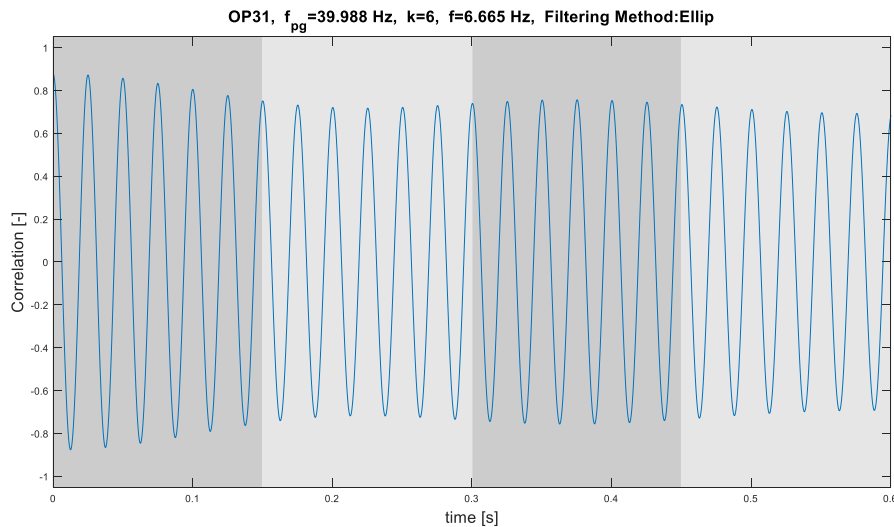
(1) C.	(2) OP	(3) $f_{pg}$ [Hz]	(4) $f_{n\_pg}$ [-]	(5) $Fase_{\theta}$ [°]	(6) $Fase_{\chi_{corr}}$ [°]	(7) $k_{\theta}$ [-]	(8) $k_{\chi_{corr}}$ [-]	(9) Error [%]	(10) $k_{\theta}$ [-]	(11) $k_{\chi_{corr}}$ [-]	(12) $f_{\theta}$ [Hz]	(13) $f_{\chi_{corr}}$ [Hz]	(14) $f_{n_{\theta}}$ [-]	(15) $f_{n_{\chi_{corr}}}$ [-]
1	10	29.2	1.00	95.5	96.9	3.18	3.23	1.5%	3	3	9.72	9.72	0.33	0.33
	10	39.9	1.37	188.7	141.5	6.29	6.46	2.6%	6	6	6.66	6.66	0.23	0.23
	31	29.2	1.00	58.9	59.0	1.96	1.97	0.1%	2	2	14.58	14.58	0.50	0.50
	31	40.0	1.37	187.3	136.4	6.24	6.23	0.1%	6	6	6.66	6.66	0.23	0.23
	34	29.2	1.00	55.3	54.9	1.84	1.83	0.7%	2	2	14.59	14.59	0.50	0.50
	82	23.5	1.00	33.2	31.0	1.11	1.03	7.1%	1	1	23.51	23.51	1.00	1.00
	94	23.2	1.00	19.8	20.0	0.66	0.67	1.1%	1	1	23.23	23.23	1.00	1.00
2	141	13.0	0.57	20.3	27.2	0.68	0.51	31.9%	1	1	13.04	13.04	0.57	0.57
	141	23.1	1.00	26.8	28.8	0.89	0.96	6.9%	1	1	23.09	23.09	1.00	1.00
	141	46.2	2.00	215.8	108.8	7.19	7.25	0.8%	7	7	6.60	6.60	0.29	0.29
	155	18.8	0.87	21.0	22.1	0.70	0.64	9.2%	1	1	18.83	18.83	0.87	0.87
	169	25.0	1.47	25.2	17.0	0.84	0.83	0.6%	1	1	25.04	25.04	1.47	1.47
3	244	18.4	1.00	26.7	26.1	0.89	0.87	2.2%	1	1	18.36	18.36	1.00	1.00
	244	33.9	1.85	165.1	90.3	5.50	5.55	0.8%	6	6	5.64	5.64	0.31	0.31
	244	44.3	2.42	196.6	80.0	6.55	6.44	1.8%	7	6	6.33	7.38	0.35	0.40
	260	15.7	0.69	21.9	32.2	0.73	0.74	1.0%	1	1	15.75	15.75	0.69	0.69
	260	22.9	1.00	41.7	42.3	1.39	1.41	1.4%	1	1	22.92	22.92	1.00	1.00
	260	33.8	1.48	169.7	114.8	5.66	5.65	0.1%	6	6	5.64	5.64	0.25	0.25
	260	44.3	1.93	196.0	101.1	6.53	6.51	0.3%	7	7	6.33	6.33	0.28	0.28
	273	17.4	0.71	24.4	33.8	0.81	0.81	1.0%	1	1	17.38	17.38	0.71	0.71
	273	24.3	1.00	44.1	44.1	1.47	1.47	0.1%	1	1	24.34	24.34	1.00	1.00
	288	17.0	0.66	22.1	33.5	0.74	0.73	0.3%	1	1	17.02	17.02	0.66	0.66
	288	25.8	1.00	50.6	50.3	1.69	1.68	0.7%	2	2	12.88	12.88	0.50	0.50
	294	14.5	0.57	19.7	34.4	0.66	0.66	0.0%	1	1	14.53	14.53	0.57	0.57
	294	25.4	1.00	46.8	46.9	1.56	1.56	0.2%	2	2	12.69	12.69	0.50	0.50
	296	14.4	0.55	21.0	33.4	0.70	0.62	13.5%	1	1	14.38	14.38	0.55	0.55
	296	21.4	0.82	17.8	22.9	0.59	0.63	5.2%	1	1	21.38	21.38	1.00	1.00
	300	21.1	0.81	35.3	38.2	1.18	1.03	14.3%	1	1	21.12	21.12	0.81	0.81
	300	26.2	1.00	46.0	46.0	1.53	1.53	0.0%	2	2	13.09	13.09	0.50	0.50

**Tabla 6.** Números de onda, frecuencias y coeficientes de frecuencia para una muestra de componentes representativos no estables de la curva característica  $Q_{ED-N_{ED}}$

(1) C.	(2) OP	(3) $f_{pg}$ [Hz]	(4) $f_{n\_pg}$ [-]	(5) $Fase_{\theta}$ [°]	(6) $Fase_{\chi_{corr}}$ [°]	(7) $k_{\theta}$ [-]	(8) $k_{\chi_{corr}}$ [-]	(9) Error [%]	(10) $k_{\theta}$ [-]	(11) $k_{\chi_{corr}}$ [-]	(12) $f_{\theta}$ [Hz]	(13) $f_{\chi_{corr}}$ [Hz]	(14) $f_{n_{\theta}}$ [-]	(15) $f_{n_{\chi_{corr}}}$ [-]
1	94	2.2	0.096	28.7	45.9	0.96	1.01	5.1%	1	1	2.2	2.2	0.096	0.096
2	141	1.9	0.081	33.4	17.5	1.11	1.13	1.6%	1	1	1.9	2.2	0.096	0.096
3	294	21.0	0.826	7.5	10.3	0.25	0.28	11.7%	0	0	NA	NA	NA	NA
	295	22.3	0.841	5.8	1.4	0.19	0.04	396.3%	0	0	NA	NA	NA	NA

En la figura 9 se muestra como ejemplo la correlación cruzada entre las señales de los sensores de presión instalados en la voluta y su relación con la frecuencia del fenómeno para un componente espectral en particular ( $f_{n\_pg}=1.37$  en el OP31), el cual se ha denominado el BB-Plot (Botero-Bolaños Plot, por su denominación en inglés). Las franjas grises

representan el periodo del fenómeno y en cada una de ellas se puede observar claramente que el número de picos o valles corresponde con el número de onda. En la gráfica se puede notar, además, que identificar los picos preponderantes que corresponderían al periodo del fenómeno no es evidente, por lo cual el método gráfico para la determinación del número de onda propuesto por Best y Moffat [14,15] no es apropiado en este caso.



**Figura 9.** BB-Plot que muestra la correlación cruzada de las señales de presión y su correspondencia con el periodo del fenómeno (bandas grises) y el número de onda (número de picos o valles en cada banda)

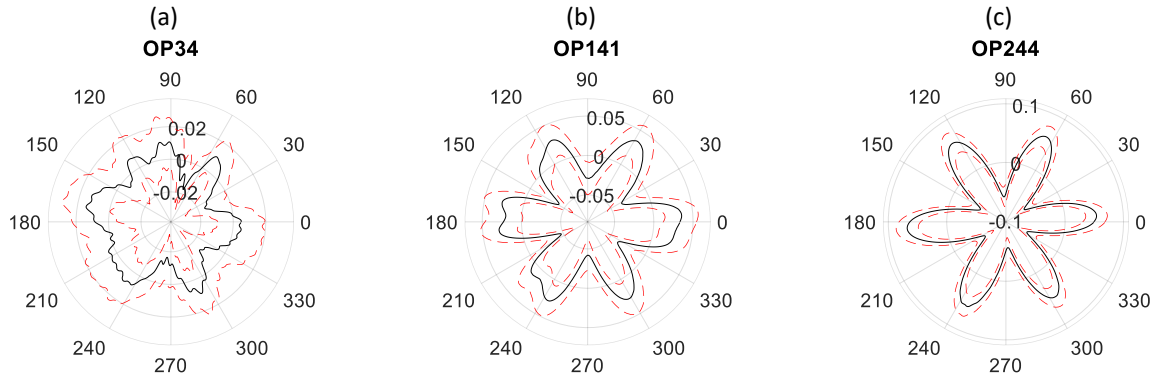
#### 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Mirando los resultados en conjunto, el primer aspecto a resaltar es que el análisis espectral y el análisis de fase sugieren la existencia de muchos fenómenos periódicos en la turbomáquina objeto de estudio. Sin embargo, hay unos componentes espectrales que resultan extraños por su localización en la curva característica  $Q_{ED}-n_{ED}$  y que posiblemente correspondan a fenómenos hidrodinámicos que quedan por fuera del alcance de este estudio. El análisis de resultados se enfocó principalmente en los componentes espectrales identificados en los 15 puntos de operación representativos de la curva característica  $Q_{ED}-n_{ED}$  (figura 6).

##### 4.1 Cuadrante 1

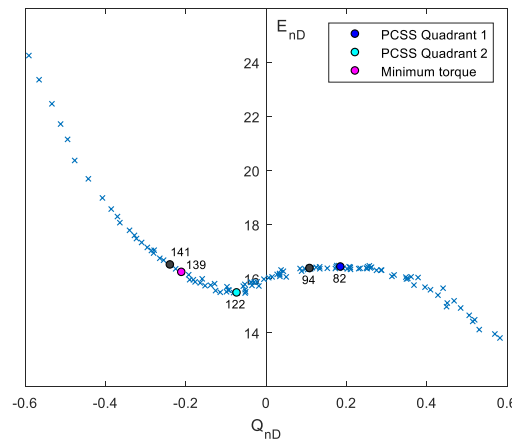
En este cuadrante predomina un fenómeno periódico con  $f_{n_{pg}}=1.37$ , con número de onda  $k=6$  y que se presenta a partir del punto de mejor eficiencia en un intervalo de  $Q_{ED}$  entre 0.1938 y 0.2934 (patrón 1). La frecuencia del fenómeno corresponde al 23% de la frecuencia del rotor. La evidencia recogida en el laboratorio y la literatura revisada no sugieren la existencia de RS en esta zona de operación de la maquinaria, ya que en el cuadrante 1, este fenómeno se esperaría en la zona de altas cabezas (o altos coeficientes de energía) y bajos caudales (o bajos coeficiente de caudal) [18, 19]. Tratándose de un fenómeno que se presentó en todos los puntos de operación en el rango de  $Q_{ED}$  ya señalado, y descartando la existencia de RS por la razón anteriormente expuesta, se presume que el componente espectral está asociado con fuerzas rotodinámicas inducidas por el fluido, las cuales se pueden presentar a nivel subsincrónico [18]. Componentes espectrales con  $f_{n_{pg}}=1$  y  $k=2$ , en los puntos de operación 31 y 34 (punto de mejor eficiencia) podrían ser también la manifestación de este tipo de fuerzas.

Un análisis TSA en el OP34 muestra que, a pesar de tratarse del punto de mejor eficiencia, la turbomáquina presenta flujos fuertemente desbalanceados que podrían ser el resultado de aquellas fuerzas rotodinámicas o de otros tipos de fuerza que se trasladan del eje al rotor. En la figura 10(a) se presenta la representación polar de la TSA para este punto de operación, donde las líneas rojas corresponden a  $TSA \pm 1\sigma$ .



**Figura 10.** Análisis TSA para 3 puntos representativos de la curva característica  $Q_{ED}-n_{ED}$ . (a) BEP Bomba, (b) Punto de operación en el segundo cuadrante, y (c) BEP Turbina

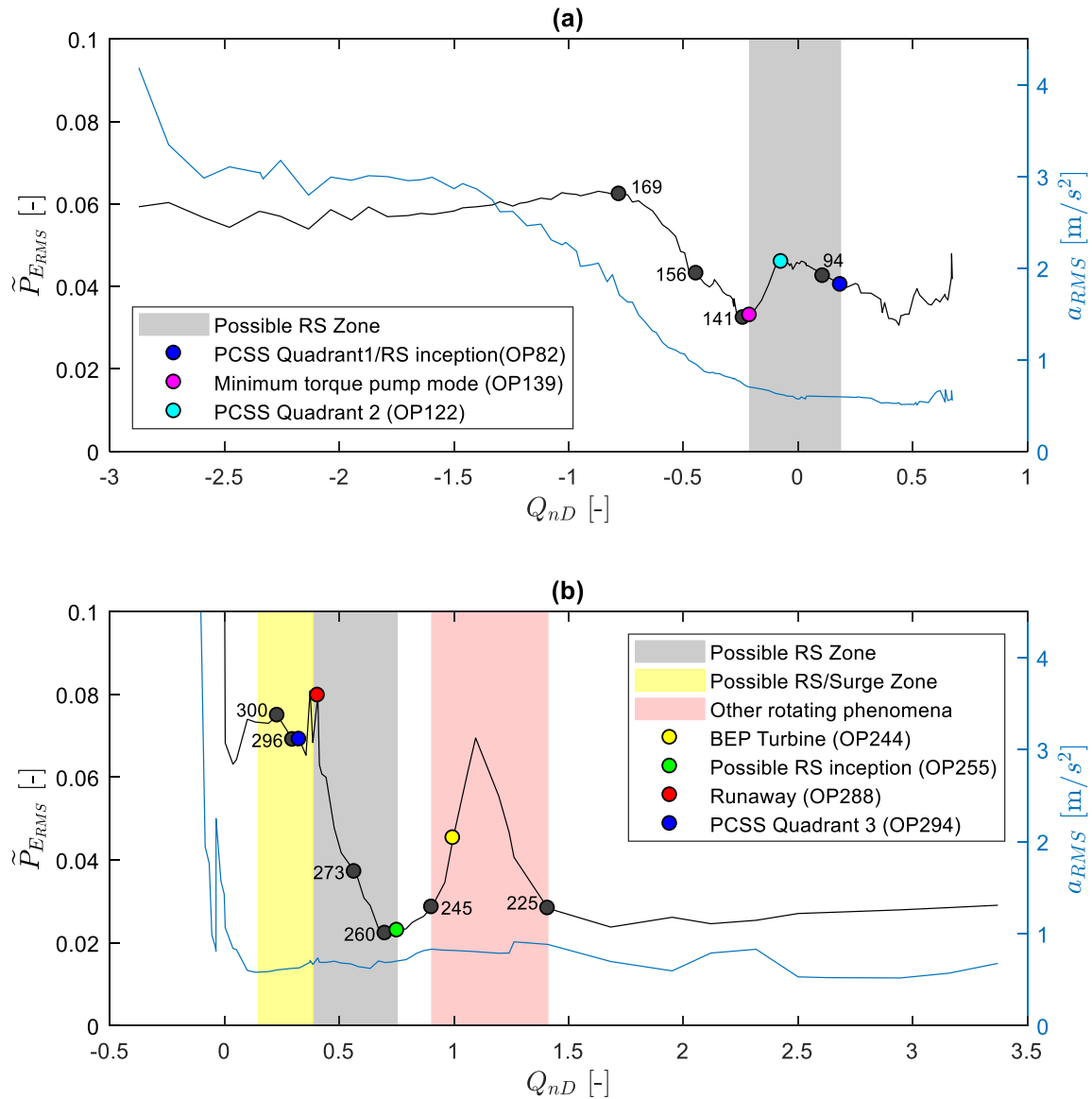
El punto de operación 94 presenta un componente de interés en  $f_{n_{pg}}=0.096$  con  $k=1$  (véase tabla 6). Si bien este componente no cumplió con el criterio de estabilidad de las señales, se tuvo en cuenta en el análisis por estar en una zona delimitada por puntos de cambio de signo de pendiente (PCSS) entre los cuadrantes 1 y 2 de la curva  $Q_{ED}-n_{ED}$  (véase figura 6) y por estar en una zona de pendiente positiva en la curva  $E_{nD}-Q_{nD}$  que se presenta en la figura 11. Vale la pena señalar que la curva característica  $E_{nD}-Q_{nD}$  solo tiene dos cuadrantes. Los cuadrantes 1 y 3 de la curva  $Q_{ED}-n_{ED}$  tienen correspondencia con el cuadrante 1 de la curva  $E_{nD}-Q_{nD}$ , donde los valores de  $Q_{nD}$  son positivos, y los cuadrantes 2 y 4 de la curva  $Q_{ED}-n_{ED}$  con el cuadrante 2 de la curva  $E_{nD}-Q_{nD}$ , donde los valores son negativos.



**Figura 11.** Vista parcial de la curva característica  $E_{nD}-Q_{nD}$  en el modo de operación bomba (derecha) y bomba-freno (izquierda)

Estudios en bombas centrífugas [3, 20] han encontrado indicios de RS a bajas frecuencias, entre el 5 y el 10% de la frecuencia de rotación del impulsor, lo que estaría en concordancia con lo evidenciado. En este caso se tiene un componente espectral de baja amplitud con una frecuencia de rotación del 9.6% con respecto a la frecuencia de rotación del impulsor. Desafortunadamente, la observación a través de las ventanas de visualización no proporcionó evidencias claras de recirculaciones de flujo entre álabes o en la zona de interacción rotor-estator (RSI). No obstante, el análisis por el método del RMS sugiere la existencia de una zona entre los cuadrantes uno y dos de la curva  $Q_{ED}-n_{ED}$  y de la  $E_{nD}-Q_{nD}$ , comprendida entre el OP82 ( $n_{ED}=-0.2467$ ,  $Q_{ED}=-0.0458$ ) y el OP139 ( $n_{ED}=-0.2482$ ,  $Q_{ED}=0.0522$ ), punto de mínimo torque en el modo bomba (cuadrantes 1 y 2 de la curva  $n_{ED}-Q_{ED}$ ), que reúne algunas características para ser considerada una zona de RS, tomando como sustento a Dörfler [19]. La primera, es que el aumento y disminución gradual de los pulsos de presión (forma de campana) en función los coeficientes de caudal son indicativos de una zona de RS. Y la segunda, componentes espectrales relacionados con el RS presentan ángulos de

desfase similares en la zona. En este caso se tomó como indicativo de los pulsos de presión la RMS de las señales de fluctuación de presión y se graficaron en función de  $Q_{nD}$ .



**Figura 12.** (a) RMS de las señales del PES y el acelerómetro en los modos de operación bomba y bomba-freno, y (b) RMS de las señales del PES y el acelerómetro en el modo de operación turbina, turbina-freno y bomba inversa

La figura 12(a) muestra el comportamiento de la RMS estimada a partir de los datos tomados en una jornada de medición donde se abarcó gran parte de los modos de operación bomba y bomba-freno. Sobre la gráfica RMS se colocaron algunos puntos representativos de los cuadrantes 1 y 2 de la curva  $Q_{ED}-n_{ED}$  (véase figura 6 en conjunto con la figura 12(a)) en función de sus coeficientes de caudal,  $Q_{nD}$ . La parte sombreada sugiere una posible zona de RS entre el OP82 y el OP139, zona de mínimo torque. Se escogió el OP82 como inicio de la zona de RS por presentar un componente espectral claro en  $f_n=0.083$ . Con respecto a los ángulos de desfase, se consideraron cuatro puntos de operación que presentan componentes espectrales entre  $f_n=0.083$  y  $f_n=0.096$ , todos con  $k=1$ , y con ángulos de

desfase entre  $24.8^\circ$  y  $34.4^\circ$ , lo cual corresponde aproximadamente a la separación de los sensores en la voluta ( $30^\circ$ ). De otra parte, en la figura 12(a) se puede observar también el comportamiento de la RMS de las señales del acelerómetro. La gráfica muestra que los pulsos de presión generados en la posible zona del RS son muy bajos, por lo cual no se registran vibraciones significativas en comparación con otros puntos de operación en el cuadrante 2 de la curva  $Q_{ED}-n_{ED}$ .

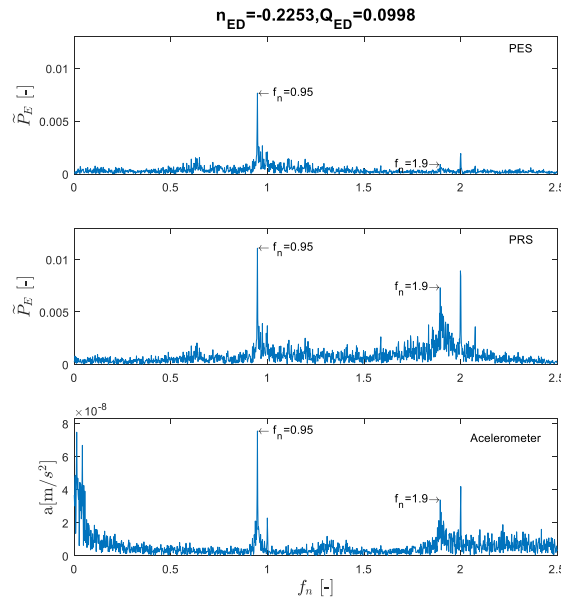
## 4.2 Cuadrante 2

El punto de operación 141 se encuentra muy cerca del punto de mínimo torque en el modo de operación de la turbomáquina como bomba (cuadrantes 1 y 2 de la curva característica  $Q_{ED}-n_{ED}$ ), lo cual puede ser observado en la figura 7 y en la figura 11. En este punto es claro un componente espectral de baja amplitud en  $f_n=0.081$  con  $k=1$  y ángulo de desfase de  $33.4^\circ$  (véase tabla 6) y que sugiere la asociación con la zona de RS señalada en el numeral anterior.

Los componentes  $f_n=0.57$  del OP141,  $f_n=0.87$  del OP155 y  $f_n=1.47$  del OP169 hacen parte del patrón espectral 3 (véase 3.2) con un  $k=1$  y van cambiando de frecuencia a medida que aumenta el factor de caudal. Este patrón tiene la particularidad de estar conformado por puntos de operación donde se producen vibraciones significativas (véase figura 12(a)) a partir del OP153, las cuales son registradas por el acelerómetro. Un ejemplo de esto se puede apreciar en la figura 13 con el OP156, donde se observa el componente espectral en  $f_n=0.95$  y un armónico en  $f_n=1.9$ . El armónico apenas es percibido por el PES, pero es claramente registrado por el PRS y el acelerómetro.

La evidencia recogida en laboratorio y la literatura revisada no permite inferir sobre el tipo de fenómeno hidrodinámico que gobierna este comportamiento, pero se descarta que sea RS, básicamente porque no existe una zona donde se identifique claramente el inicio, el desarrollo y el decaimiento de los pulsos de presión característicos del fenómeno [4,6,19]. En la figura 12(a) se observa que la RMS de las fluctuaciones de presión tienen un crecimiento pronunciado a partir de la posible zona de RS hasta el OP169 y de allí en adelante un decaimiento muy suave hasta lograr una especie de estabilización. De otro lado, la RMS de las señales del acelerómetro muestra un aumento permanente desde la posible zona de RS y hasta el último punto de operación del cuadrante 2 (OP203).

En la figura 10(b) se presenta el TSA para el OP141, donde se puede apreciar que la onda de presión se comporta con una leve irregularidad, lo cual sugiere ser el resultado del fenómeno hidrodinámico que varía de frecuencia a lo largo del cuadrante, y que se empieza a percibir precisamente en este punto de operación.

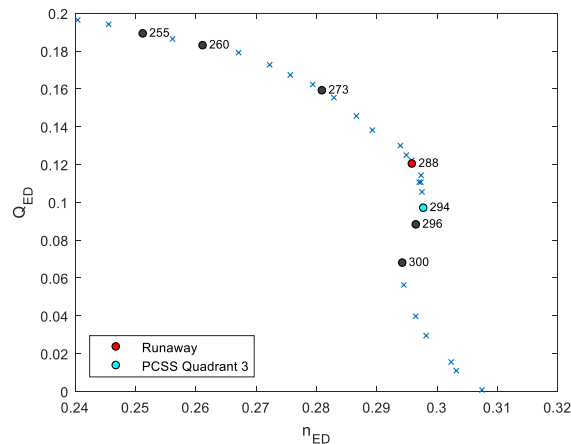


**Figura 13.** Espectros de las señales de los tres sensores instalados en la voluta para el OP156

### 4.3 Cuadrante 3

El punto de mejor eficiencia en modo turbina presenta dos componentes de interés ( $f_{n\_pg}=1.85$  y  $f_{n\_pg}=2.42$ ) con un número de onda  $k=6$  en los dos casos, lo que significa la presencia de fenómenos rotativos subsíncronicos con coeficientes de frecuencia  $f_n=0.31$  y  $f_n=0.40$ . Tratándose del punto de mejor eficiencia resulta extraña esta situación. No obstante, es conveniente señalar que la turbomáquina objeto de estudio en los cuadrantes 2, 3 y 4 de la curva  $Q_{ED}-n_{ED}$  está trabajando en condiciones fuera de diseño, por lo cual es posible que se presenten este tipo de cosas. Sin embargo, la TSA del OP244 (figura 10(c)) muestra que la presión está bien distribuida alrededor de la circunferencia, lo cual sugiere que los fenómenos hidrodinámicos presentes en este punto de operación no afectan su comportamiento.

En la figura 12(b) se puede observar que el OP244 está en una zona de incrementos de pulsos de presión bien definida en el intervalo  $0.752 \leq Q_{nD} \leq 1.409$  (entre el OP225 y el OP255). Esta zona está caracterizada por presentar puntos de operación con componentes espectrales bien claros que varían entre  $1.8X$  y  $2.45X$ , sin hacer parte de ninguno de los patrones espectrales identificados en el numeral 3.2. Adicionalmente, estos componentes presentan números de onda que varían entre 3 y 7, lo que sugiere que son fenómenos rotativos subsíncronicos, con coeficientes de frecuencia entre 0.30 y 0.71. La forma del pico podría sugerir una zona de RS, sin embargo, el lugar donde se localiza no es el habitual para este tipo de fenómenos, ya que en el cuadrante 3 se espera en la zona de turbina-freno [4, 6, 19, 21]. Además, los ángulos de desfase entre las señales de presión no son similares en esta zona, variando entre los  $97.6^\circ$  y los  $202.8^\circ$ . Si bien esta zona no se puede descartar como posible zona de RS, al no tener más evidencias se optó por llamarla zona de otros fenómenos rotativos.



**Figura 14.** Vista parcial del cuadrante 3 de la curva característica  $Q_{ED}-n_{ED}$ , donde se puede apreciar la forma “s” en el modo de operación turbina-freno

La figura 14 muestra la parte baja del modo de operación turbina y el modo de operación turbina-freno con todos los puntos de operación obtenidos en una misma jornada de muestreo. En toda esta región, a partir del OP255, se presenta una situación muy interesante con dos particularidades. La primera, que se presenta una zona con componentes espectrales propios de un RS (55% a 71% de la velocidad de rotación del impulsor), con números de onda iguales a 1 y con ángulos de desfase entre  $20.5^\circ$  y  $24.1^\circ$ , los cuales se consideran aproximados al ángulo de separación entre los sensores de presión colocados en la voluta. Esta zona corresponde a la franja gris de la figura 12(b). En bombas-turbina operando en modo turbina se han encontrado frecuencias de rotación del RS por el orden del 70 % de la velocidad de rotación del impulsor en el embalamiento [4], o por el orden del 59% en la zona de turbina-freno cerca del embalamiento [21], lo cual estaría en concordancia con los resultados obtenidos. Para el embalamiento se tiene una frecuencia del 66% de la frecuencia del impulsor y cerca del embalamiento (OP294), en la zona de turbina-freno, del 57%.

La segunda particularidad consiste en una zona con componentes espectrales alrededor de  $f_n=0.82$ , algunos de ellos en fase ( $k=0$  y ángulos de desfase entre  $2.4^\circ$  y  $11.3^\circ$ ) y otros no ( $k=1$  y ángulos de desfase entre  $15.1^\circ$  y  $35.3^\circ$ ). Esta

zona está representada en la figura 12(b) como una franja amarilla. El fenómeno en fase sugiere oscilaciones de presión y caudal que involucran a todo el sistema hidráulico, posiblemente un surge o un fenómeno auto-oscilatorio [19] y el fenómeno que no está en fase sugiere un RS. Esta situación sugiere que el componente alrededor de 0.82X manifiesta en algunos momentos un fenómeno rotativo con una celda de rotación como un RS, y en otros momentos un fenómeno en fase como un surge, lo cual no es de todo extraño si se tiene en cuenta que en compresores los dos fenómenos han estado íntimamente ligados, y hasta los años 50's del siglo 20 no se había hecho una diferenciación clara entre los dos tipos de perturbaciones [2], tanto así que hay una discusión de vieja data entre los investigadores del tema sobre si el surge es una perturbación en si misma o es una consecuencia del RS [2].

Mención especial merece el caso del OP294 que corresponde al PCSS en el cuadrante 3 (véase espectro en la figura 6), donde se presentan simultáneamente dos componentes que sugieren, de una parte, la presencia de un RS ( $f_n=0.57$  y  $k=1$ ), y, de otra parte, la presencia de un surge ( $f_n=0.83$  y  $k=0$ ). Según Day [2], los dos tipos de perturbaciones pueden ocurrir en el mismo punto de inestabilidad en un sistema de compresión. La evidencia recogida sugiere que esto se puede dar también en un sistema hidráulico.

#### 4.4 Cuadrante 4

Este cuadrante no presentó componentes espectrales de interés diferentes al 1X y 2X (véase figuras 3(d) y 11(b)). No obstante, es importante señalar que los mayores pulsos de presión y las mayores vibraciones en la turbomáquina se presentan en este cuadrante. La figura 12(b) fue recortada deliberadamente en la escala vertical para mantener la relación de aspecto con la figura 12(a). No obstante, es claro que a partir del  $Q_{nD}=0$ , y para valores menores que este, los pulsos de presión aumentan vertiginosamente. En el caso de la RMS de los coeficientes de fluctuación se alcanzó un valor máximo en 3.37, y para la RMS de la aceleración un valor de 9.45 m/s<sup>2</sup>.

#### 4.5 Conclusiones

En términos generales, los resultados del estudio permiten concluir lo siguiente:

- Una instrumentación básica como la utilizada en esta investigación permitió recoger suficientes evidencias para caracterizar indirectamente el fenómeno subsincrónico objeto de estudio. A pesar de utilizar dos sensores de presión en la voluta de características diferentes, los dos reflejaron los mismos componentes espectrales de interés, lo que permitió el uso de las señales para los análisis espectrales y la estimación de los números de onda.
- La validación del método propuesto para estimar el número de onda, que se ha denominado el de las fases de Fourier, sugiere que éste puede ser una alternativa viable para determinar  $k$ , con la gran ventaja de no ser necesario el filtrado de señales y con las implicaciones de ello, como el ahorro de tiempo y recursos computacionales, entre otras.
- A nivel subsincrónico la turbomáquina objeto de estudio presenta múltiples fenómenos hidrodinámicos rotativos, muchos de los cuales no fueron caracterizados porque estaban fuera del objeto de la investigación. No obstante, la investigación recogió evidencias para definir cuatro zonas de interés a nivel subsincrónico, una entre el cuadrante 1 y 2, y tres en el cuadrante 3 de la curva característica  $Q_{ED}-n_{ED}$ . De estas cuatro zonas, hay tres que sugieren la presencia de RS. En la primera zona ( $-0.0456 \leq Q_{ED} \leq 0.0522$  o  $-0.2102 \leq Q_{nD} \leq 0.1856$ ) los espectros de algunos puntos de operación mostraron componentes en el intervalo  $0.083 \leq f_n \leq 0.096$ . Cabe anotar que la amplitud de estos componentes fue muy pequeña, pero, aun así, se pueden identificar con claridad (véase espectros 94 y 141 de la figura 6). La segunda zona ( $0.1107 \leq Q_{ED} \leq 0.1864$  o  $0.3726 \leq Q_{nD} \leq 0.7277$ ) presentó espectros de algunos puntos de operación con componentes en el intervalo  $0.51 \leq f_n \leq 0.71$ . La tercera zona ( $0.0456 \leq Q_{ED} \leq 0.1107$  o  $0.1558 \leq Q_{nD} \leq 0.3726$ ) exhibió espectros de algunos puntos de operación con componentes en el intervalo  $0.81 \leq f_n \leq 0.84$ . Esta zona es la más controvertida porque la evidencia muestra que en dos puntos de operación coexisten simultáneamente dos fenómenos hidrodinámicos, uno en fase y el otro no. Adicionalmente, la zona presenta componentes espectrales aproximadamente iguales que en unos casos se comportan como fenómenos en fase y en otros casos no.
- Para confirmar sin lugar a duda la existencia del RS en la turbomáquina objeto de estudio se hace necesario la reconfiguración del experimento, instalando sensores en otros puntos de la turbomáquina y mejorando la visualización en la zona RSI.

- El patrón espectral observado en el cuadrante dos (patrón 3), donde el coeficiente de frecuencia va aumentando a medida que aumenta el coeficiente de caudal, se puede convertir en una línea de investigación ya que este tipo de comportamientos no se puede explicar a la luz de la literatura revisada. Más aún, si se tiene en cuenta que el número de onda en muchos de los componentes espectrales de este patrón están por el orden de 6 o 7, se estaría hablando de fenómenos subsincrónicos que ameritan su identificación y caracterización.

## Referencias

- [1] Berten, S. et al., 2009, "Experimental Investigation of Flow Instabilities and Rotating Stall in a High-Energy Centrifugal Pump Stage," Proceedings of the ASME 2009 Fluids Engineering Division Summer Meeting, FEDSM2009-78562.
- [2] Day, I. J., 2016, "Stall, Surge, and 75 Years of Research," Journal of Turbomachinery, 138(1): 011001-1- 011001-16
- [3] Ullum, U. et al., 2006, "Prediction of rotating stall within an impeller of a centrifugal pump based on spectral analysis of pressure and velocity data," Journal of Physics: Conference Series, 52, pp. 36–45
- [4] Hasmatuchi, V. et al., 2011, "Experimental Evidence of Rotating Stall in a Pump-Turbine at Off-Design Conditions in Generating Mode," Journal of Fluids Engineering, 133(5), pp. 051104-1- 051104-8
- [5] Braun, O., 2009, "Part Load Flow in Radial Centrifugal Pumps," Thesis PhD, EPFL.
- [6] Botero, F. et al., 2014, "Non-intrusive detection of rotating stall in pump-turbines," Mechanical Systems and Signal Processing, 48:162-173
- [7] Johnson, D. A. et al., 2005, "Measurements of Rotating Stall Inside a Centrifugal Pump Impeller," Proceedings of 2005 ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting and Exhibition, FEDSM2005-77313, pp.1-8.
- [8] International Electrotechnical Commission, 1999, "Hydraulic turbines, storage pumps and pump-turbines - Model acceptance tests," CEI/IEC 60193, second ed., Switzerland.
- [9] Kauper, K., and Staubli, T., 1999, "The Unsteady Pressure Field in a High Specific Speed Centrifugal Pump Impeller—Part II: Transient Hysteresis in the Characteristic," Journal of Fluids Engineering, 121(9), pp. 627-632.
- [10] Fu, Y. et al., 2015, Numerical and Experimental Analysis of Flow Phenomena in a Centrifugal Pump Operating Under Low Flow Rates," Journal of Fluids Engineering, 137(1), pp. 011102-1 a 011102-12.
- [11] Lei, C. et al., 2016, "Numerical investigation on the rotating stall characteristics in a Three-blade centrifugal impeller," Proceedings of the ASME 2016 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. IMECE2016-657947, pp. 1-7.
- [12] <http://www.ni.com/en-us/support.html>
- [13] Knapp, R., 1937, "Complete Characteristics. of Centrifugal Pumps and Their Use in the Prediction of Transient Behavior," A.S.M.E. Transactions. HYD59-11(nov):683-689.
- [14] Best, R. et al, 1988, "Flow Measurements in Rotating Stall in a Gas Turbine Engine Compressor," Proceedings of the ASME 1988 Gas Turbine and Aeroengine Congress, Amsterdam, The Netherlands. 88-GT-219, pp. 1-7
- [15] Fortin, J. et al, 1990, "Inlet Flow Distortion Effects on Rotating Stall," Proceedings of the ASME 1990 Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exposition, Brussels, Belgium. 90-GT-215, pp. 1-7
- [16] Haraux A. (2018) Almost Periodic Functions and the Abstract Wave Equation. In: Nonlinear Vibrations and the Wave Equation. SpringerBriefs in Mathematics. Springer, Cham



- [17] Zhang, N. et al, 2014, "Unsteady Pressure Pulsation and Rotating Stall Characteristics in a Centrifugal Pump with Slope Volute," *Advances in Mechanical Engineering*, Volume 2014 Article ID 710791, 11 pages. <http://dx.doi.org/10.1155/2014/710791>
- [18] Brennen, C. E., 1994, "Hydrodynamics of Pumps," Concepts NREC and Oxford University Press. Chapter 8 in [https://www.researchgate.net/publication/36721047\\_Hydrodynamics\\_of\\_Pumps](https://www.researchgate.net/publication/36721047_Hydrodynamics_of_Pumps).
- [19] Dörfler, P. et al, 2013, "Flow-Induced Pulsation and Vibration in Hydroelectric Machinery," Springer, Chapter 6.
- [20] Sinha, M. et al, 2001, "The Flow Structure During Onset and Developed States of Rotating Stall Within a Vaned Diffuser of a Centrifugal Pump," *Journal of Fluids Engineering*, 123(9), pp. 490-499.
- [21] Widmer, C. et al, 2011, "Unstable Characteristics and Rotating Stall in Turbine Brake Operation of Pump-Turbines," *Journal of Fluids Engineering*, 133(4), pp. 041101-1- 041101-9.